Práctica de Laboratorio Nº1 Cinemática.
Tiro oblicuo

Sebastián Tognana
Cátedra: Física General
Fac. de Cs. Exactas-UNCPBA
Cursada 2015

Objetivos

Los objetivos de esta práctica son:

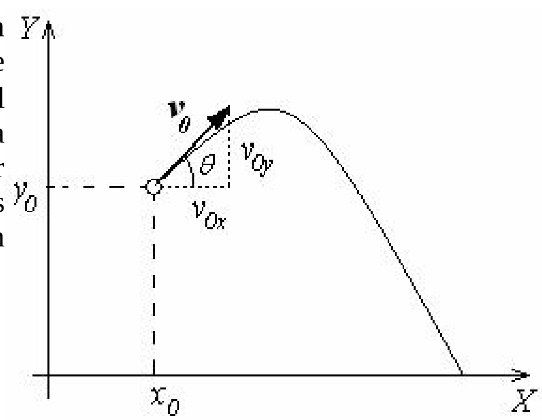
- Familiarizar al alumno con equipamiento de laboratorio.
- Introducir al alumno a las mediciones de laboratorio.
- Analizar las ecuaciones de tiro oblicuo.

Materiales.

- Lanzador PASCO.
- Bola de acero.
- Sensores de movimiento (fotosensores)
- Papel carbónico y papel blanco
- Reglas, calibres, plomada.

Introducción

En un tiro oblicuo un cuerpo es lanzado con una velocidad inicial v_0 y un ángulo de inclinación ¯ respecto a la horizontal. En el eje horizontal X, despreciando la resistencia del aire, el cuerpo no sufre aceleración, por lo tanto la velocidad en este eje v_{0x} es constante y la coordenada x de la posición varía en función del tiempo t como



$$x(t) = x_0 + v_{0x}.t \qquad (1)$$

donde x_0 es coordenada x de la posición inicial.
En el eje vertical (eje Y) el cuerpo sufre la aceleración de la gravedad g dirigida hacia el centro de la tierra. La componente en el eje Y de la velocidad, v_y, varía con el tiempo de acuerdo a:

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad (2)$$

En esta ecuación se ha asumido el eje Y positivo hacia arriba y por lo tanto el segundo término que tiene en cuenta la aceleración, cuyo valor es de 9.8 m/s^2 (aceleración de la gravedad), tiene signo negativo.

La coordenada *y* del cuerpo estará dada por:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad (3)$$

Las componentes en los ejes X e Y de la velocidad inicial cumplen la relación:

$$tg(¯) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \qquad (4)$$

recordando que ¯ es el ángulo de lanzamiento del cuerpo.

El módulo de la velocidad inicial, $v_{0,}$ puede ser obtenido a partir de:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \qquad (5)$$

La ecuación 3 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$y(t) = y_0 + v_0.sen¯.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad (6)$$

y la ecuación 1:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos¯.t \qquad (7)$$

Para calcular el alcance del proyectil *x* se puede hacer *y(t)* =0 en la ecuación 6, despejar *t* y reemplazarlo en la ecuación 7. Entonces *x* en función del ángulo de disparo quedaría:

$$x = \frac{v_0^2 \cos\theta}{g}\left(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2 y_0 g}{v_0^2}}\right) \qquad (8)$$

Para calcular el máximo alcance x_m, es decir el ángulo para el cual el proyectil se desplaza mayor distancia horizontal, se deber derivar la ecuación de *x* en función de θ e igualar a cero. El resultado de este procedimiento arroja el siguiente resultado:

$$tan\theta_M = \frac{v_0}{\sqrt{{v_0}^2 + 2 y_0 g}} \qquad (9)$$

donde θ_M es el ángulo para el cual se obtiene el máximo alcance. Notar que si y_0=0 es decir el movimiento del proyectil comienza a la misma altura a la cual impacta, se obtiene el resultado θ_M = 45°. Los pasos intermedios del cálculo se encuentran explicados en el anexo.

Medidas de seguridad.

Respetar las medidas de seguridad del laboratorio.
Ser cuidadoso con los equipos utilizados.
Ser ordenado con los efectos personales y con el equipo de medición.
No colocarse delante del lanzador.
Usar gafas protectoras.
Sea cuidadoso cuando conecte instrumentos eléctricos. No sobrecargue la línea de tensión.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

La experiencia se puede dividir en un procedimiento común y luego dos experiencias por separado.

Paso 1. Colocar el lanzador firmemente sujeto al borde de la mesa de manera que el proyectil caiga en el piso. Accionar el mecanismo de disparo en el primer punto y hacer un tiro de prueba para comprobar donde cae la bola de acero. TENER PRECAUCION: LEER LAS MEDIDAS DE SEGURIDAD.

Paso 2. Medir la distancia al suelo desde el punto de disparo (y_0) usando una cinta métrica o una regla.

Paso 3. Colocar dos sensores en la boca del lanzador. Estos sensores están distanciados una distancia d = 10 cm (corroborar usando un calibre).

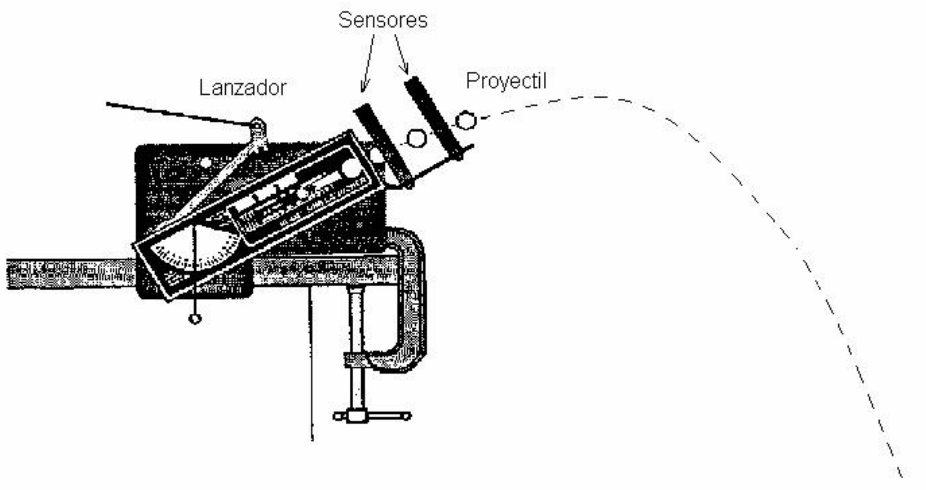
Paso 4. Conectar los sensores al “timer”. Corroborar su funcionamiento pasando la mano delante y poniendo en marcha el conteo.
RECORDAR ANOTAR TODOS LOS VALORES MEDIDOS

Experiencia 1.
Paso 5: Realizar una gran cantidad de disparos, determinando el tiempo que tarda el proyectil en pasar por los sensores t_s. Calcular el promedio, la desviación estandar y el error medio cuadratico del promedio.

Experiencia 2.
Paso 6. Medir el ángulo de disparo (θ) usando el transportador adosado al lanzador.

Paso 7. Pegar un papel blanco y un papel carbónico en el piso, en el lugar donde caerá la bola.

Paso 8. Disparar el lanzador. En cada lanzamiento anotar la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento hasta donde cae la bola (x). Por cada ángulo realizar al menos tres disparos.



Paso 9. Modificar el ángulo de disparo y repetir los pasos 6, 7 y 8.

Cálculos.

La velocidad inicial se puede calcular asumiendo que durante la distancia d entre los dos sensores la velocidad es constante.

En ese caso la velocidad inicial v_0 se podría calcular de:

$$v_0 = \frac{d}{t_s}$$

Usando el valor de t_s calculado en el paso **5** y el valor de d medido en **3**, calcular el valor de v_0, y realizar la propagación de errores para determinar el error de v_0.

Con los resultados obtenidos del alcance realizar un gráfico de x en función de θ.
Utilizando el valor promedio de v_0 y el valor medido de y_0 graficar la función dada en la ecuación 8. Comparar con el grafico anterior. Analizar posible fuentes de error.
Determinar visualmente a partir de los puntos experimentales cuál es el valor máximo de x. Comparar con la ecuación 9.

Realizar un informe donde se presenten los resultados obtenidos de cada medición, los valores promedio y errores correspondientes.

Anexo

En este anexo se realizarán los cálculos para obtener la ecuación del máximo alcance de un tiro oblicuo. El desarrollo está basado en lo descripto en http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance/alcance.htm y las referencias allí citadas.

Partiendo de las ecuaciones de $x(t)$ e $y(t)$ para un tiro oblicuo, en este caso el disparo de un proyectil desde una altura inicial y_0 con un ángulo θ.

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta\, t \qquad (1)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \mathrm{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Ahora analizamos el caso cuando el proyectil llega al piso, es decir cuando $y(t)$ =0. En ese caso $x(t)$ indica cuanto se desplazó horizontalmente el proyectil hasta llegar al piso. Esto es lo que se denomina alcance y lo llamaremos implemente como x. Suponemos que la coordenada inicial en el eje horizontal, es decir x_0, es igual a cero. Las ecuaciones anteriores quedan entonces:

$$x = v_0 \cos\theta\, t \qquad (3)$$

$$0 = y_0 + v_0 \mathrm{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

La ecuación 4 es un polinomio de segundo orden en la variable t. Se puede despejar entonces t usando la fórmula de Baskara.

$$t = \frac{-v_0 \mathrm{sen}\theta \pm \sqrt{v_0^2 \mathrm{sen}^2\theta - 4\left(-y_0 \frac{g}{2}\right)}}{-g} = \frac{-v_0 \mathrm{sen}\theta \pm \sqrt{v_0^2 \mathrm{sen}^2\theta + 2 y_0 g}}{-g} \qquad (5)$$

Obviamente esto nos dá dos soluciones pero se puede observar que si se elige el signo + en la raíz entonces el tiempo resulta negativo, que no tiene sentido físico en este problema. Entonces se elige el signo – , por lo que el tiempo queda:

$$t = \frac{v_0 \mathrm{sen}\theta + \sqrt{v_0^2 \mathrm{sen}^2\theta + 2 y_0 g}}{g} = \frac{v_0 \left(\mathrm{sen}\theta + \sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + \frac{2 y_0 g}{v_0^2}}\right)}{g} \qquad (6)$$

Reemplazando ahora en la ecuación 3:

$$x = \frac{v_0^2 \cos\theta\left(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2y_0 g}{v_0^2}}\right)}{g} \qquad (7)$$

Por simplicidad llamaremos A al argumento de la raíz:

$$A = \operatorname{sen}^2\theta + \frac{2y_0 g}{v_0^2} \qquad (8)$$

Para calcular el máximo alcance se debe derivar la ecuación 7 respecto a θ e igualar a cero.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{A})}{} + \cos\left(\cos + 1/2\,\frac{1}{\sqrt{A}}\,2\operatorname{sen}\cos\right)\right) = 0 \qquad (9)$$

Entonces:

$$\left(-\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{A}) + \cos\theta\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{A}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\right) = 0 \qquad (10)$$

Multiplicando por $\sqrt{A}$ (distinto de cero en los casos con sentido físico)

$$\left(-\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{A}) + \cos\theta\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{A}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\right)\sqrt{A} = 0 \qquad (11)$$

Se realiza la distributiva de $\sqrt{A}$.

$$-\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{A} - \operatorname{sen}\theta\, A + \cos^2\theta\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 0 \qquad (12)$$

Volviendo A a la forma dada en la ecuación 8 para el segundo término y haciendo nuevamente distributiva:

$$-\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{A} - \operatorname{sen}^3\theta - \frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2} + \cos^2\theta\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 0 \qquad (13)$$

Se pasa el tercer término al otro lado de la igualdad y se saca factor común sen^2 y cos^2

$$-\operatorname{sen}^2\theta(\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta\left(\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2} \qquad (14)$$

Se saca nuevamente factor común. Luego se utiliza la igualdad trigonométrica $\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = \cos 2\theta$ para acortar la escritura.

$$\left(\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\right)\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = \left(\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\right)\left(\cos 2\theta\right) = \frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2} \qquad (15)$$

Se pasa *cos 2θ* dividiendo.

$$\left(\sqrt{A} + \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2\left(\cos 2\theta\right)} \qquad (16)$$

Se pasa *sen θ* restando.

$$\sqrt{A} = \frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2\left(\cos 2\theta\right)} - \operatorname{sen}\theta \qquad (17)$$

Se eleva ambos términos al cuadrado

$$A = \left(\frac{2y_0\, g\operatorname{sen}\theta}{v_0^2\left(\cos 2\theta\right)} - \operatorname{sen}\theta\right)^2 \qquad (18)$$

Se vuelve A a su forma original (ecuación 8) y se resuelve el binomio al cuadrado.

$$\text{sen}^2\theta + \frac{2y_0\,g}{v_0^2} = \left(\frac{2y_0\,g\,\text{sen}\theta}{v_0^2(\cos 2\theta)}\right)^2 - \frac{4y_0\,g\,\text{sen}^2\theta}{v_0^2(\cos 2\theta)} + \text{sen}^2\theta \tag{19}$$

Se simplifica *sen*^{2} θ y se simplifica $\frac{2y_0\,g}{v_0^2}$

$$1 = \frac{2y_0\,g}{v_0^2}\left(\frac{\text{sen}\theta}{(\cos 2\theta)}\right)^2 - \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{(\cos 2\theta)} \tag{20}$$

Pasando términos a la izquierda:

$$1 + \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{(\cos 2\theta)} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2}\left(\frac{\text{sen}\theta}{(\cos 2\theta)}\right)^2 \tag{21}$$

Multiplicando por $cos^2\ 2\theta$:

$$\cos^2 2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta\cos 2\theta = \frac{2y_0\,g}{v_0^2}\text{sen}^2\theta \tag{22}$$

Rescribiendo y pasando $sen^2\theta$ dividiendo:

$$\frac{\cos 2\theta(\cos 2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta)}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} \tag{23}$$

Volviendo $cos2\theta$ a la forma original

$$\frac{(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta)}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} \tag{24}$$

$$\frac{(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} \tag{25}$$

Recordando que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

$$\frac{(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} \tag{26}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} - 1 = \frac{1}{\tan^2\theta} - 1 = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} \tag{27}$$

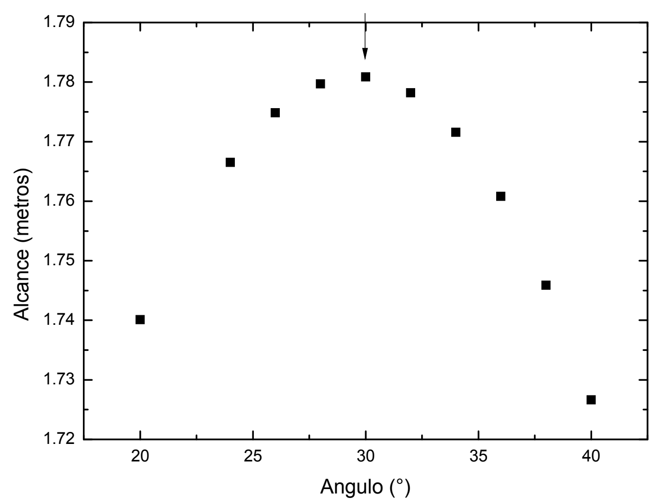
$$\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{2y_0\,g}{v_0^2} + 1 \tag{28}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{2y_0\,g}{v_0^2} + 1}} = \frac{v_0}{\sqrt{2y_0\,g + v_0^2}} \tag{29}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{2y_0\,g + v_0^2}}\right) \tag{30}$$

Está ecuación indica cual es el ángulo que permite el alcance máximo para una dada altura inicial y una dada velocidad inicial. Si y_0 es cero entonces el ángulo de máximo alcance es 45°.

Como analizar las ecuaciones gráficamente?
Supongamos que queremos graficar el alcance (o x) para un proyectil que se dispara con cierta velocidad inicial y desde una cierta altura. En particular supongamos una velocidad inicial de 3.15 m/s y una altura de 1.06 m (similares a las que se usan en la práctica). Entonces con la ecuación 7 podemos probar con distintos ángulos y calcular x.
Si luego graficamos en el eje horizontal el ángulo de disparo y en el eje vertical el alcance (o x) se obtiene lo siguiente:



La flecha indica cual sería el máximo aproximado de la curva, el cual en este caso se obtiene para un ángulo de alrededor de 30°. Si ahora usamos la ecuación 30 para calcular el ángulo de máximo alcance encontramos que el mismo sería 29.6°.

Importante: recordar que para realizar los cálculos el ángulo debe estar expresado en radianes.